МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО –
ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. акад. СТЕПАНА ДЕМ'ЯНЧУКА

Р. М. Літнарович

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У ПСИХОЛОГІЇ

Частина 3

Навчальний посібник

Рівне, 2006

Літнарович Р. М. Основи математичної статистики у психології. Частина 3. навчальний посібник. – МЕГУ, Рівне, 2006, – _49 с.

Рецензенти:
В. Г. Бурачек, доктор технічних наук, професор
Е. С. Парняков, доктор технічних наук, професор
В. О. Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск:
Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Намічені головні напрямки, які можуть бути корисними для тих, кому необхідно провести обробку матеріалів психологічного експерименту. На прикладі конкретного психологічного дослідження проводиться ранжирування даних, будується варіаційний ряд, який представляється у вигляді гістограми і полігону розподілу частот. Проводиться оцінка мір центральної тенденції, даються характеристики асиметрії і ексцесу, уділяється увага перевірці статистичних гіпотез. Знаходиться дисперсія і стандарт, приводиться крива розподілу результатів. Акцентується увага на застосуванні параметричних і непараметричних методів статистичних досліджень.

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів вузів.

ЗМІСТ

«...Если победы, полезные для человечества, затрагивают ваше сердце ... если вы ревниво относитесь к участию вашей родины в развитии этих чудес, заинтересуйтесь, умоляю вас, и священными жилищами, столь выразительно именующимися «Лабораториями». Требуйте, чтобы число их увеличивалось, чтобы они украшались: это храмы будущего богатства и благосостояния. Здесь человечество учится читать Книгу природы, Книгу прогресса и гармонии Вселенной; дела же человеческие часто полны варварства, фанатизма и призывов к разрушению.»

Л. Пастер

П е р е д м о в а

Слово «статистика» часто асоціюється зі словом «математика», і це лякає студентів, які пов'язують математику зі складними формулами, що потребують високого рівня абстрагування.

Але, як говорить Мак – Коннел, статистика – це перш за все спосіб мислення, і для її використання потрібно лише мати небагато здорового глузду ы знати основи математики. В нашому повсякденному житті ми, самі про це не здогадуючись, постійно займаємося статистикою, плануючи бюджет, розраховуючи споживання бензину автомобілем, оцінюючи зусилля, які необхідні для засвоєння якогось курсу, з врахуванням отриманих до цих пір оцінок, передбачаючи ймовірність доброї чи поганої погоди по метеорологічному прогнозу або взагалі оцінюючи як вплине та чи інша подія на наше особисте або сумісне майбутнє, – нам постійно приходиться відбирати, класифікувати і впорядковувати інформацію, пов'язувати її з іншими даними так, щоб можна було робити висновки, які б дали можливість прийняти вірне рішення.

Всі ці види діяльності мало відрізняються від тих операцій, які лежать в основі наукового дослідження і полягає в синтезі даних, отриманих на різних групах об’єктів в тому чи іншому експерименті, в їх порівнянні з метою виявити риси відмінності між ними, в їх співставленні з метою виявити показники, що змінюються в одному напрямку, і, на кінець, в передбаченні окремих фактів на основі тих висновків, до яких призводять отримані результати. Саме в цьому і заклечається мета статистики в науках взагалі, особливо в гуманітарних. В останніх немає нічого абсолютно достовірного, і без статистики висновки у більшості випадків були б чисто інтуїтивними і не могли б складати солідну основу для інтерпретації даних, отриманих в інших дослідженнях.

Автор виражає щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору Йосипу Володимировичу Джуню за підтримку наукового напрямку і сприянню виходу в світ цієї роботи.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Для того, щоб оцінити величезні переваги, які може дати статистика, ми спробуємо прослідкувати за ходом розшифровки і обробки даних, отриманих в результаті експерименту. Тим самим, виходячи із конкретних результатів і тих питань, які вони ставлять перед дослідником, ми зможемо розібратися в різних методиках і нескладних способах їх використання. Але, перед тим як приступити до цієї роботи, нам потрібно буде розглянути в самих загальних рисах три головні розділи статистики.

1. *Описова статистика*, як слідує із назви, дає можливість описувати, підсумовувати і відтворювати у вигляді таблиць або графіків дані того чи іншого розподілу, його розмах і дисперсію.
2. *Задача індуктивної статистики* – перевірка того, чи можна поширити результати ,отримані на даній вибірці, на всю популяцію(генеральну сукупність), із якої взята ця вибірка. Іншими словами, правила цього розділу статистики дають можливість вияснити, до якого степеня можна шляхом індукції узагальнити на більше число об'єктів ту чи іншу закономірність, виявлену при вивченні їх обмеженої групи в ході якого-небудь спостереження або експерименту.

   Таким чином, за допомогою індуктивної статистики роблять якісь висновки і узагальнення, виходячи з даних, отриманих при вивченні вибірки.
3. Нарешті, визначення кореляції дає можливість встановити, наскільки зв'язані між собою дві змінні, з тим, щоб було можливим передбачити можливі значення однієї з них, якщо ми знаємо другу.

Існує дві різновидності статистичних методів або тестів, які дають можливість узагальнити або вирахувати степінь кореляції.

Перша різновидність – найбільш поширені параметричні методи, в яких використовуються такі параметри, як середнє значення або дисперсія даних.

Друга різновидність – це непараметричні методи, які надають неоціниму послугу у тому випадку, коли дослідник має справу з дуже малими вибірками, або з якісними даними; ці методи дуже прості, як з точки зору розрахунків, так і з точки зору використання. Коли ми ознайомимося з різними способами опису даних і перейдемо до їх статистичного аналізу, ми розглянемо ці дві різновидності.

Деякі основні поняття

1. Генеральна сукупність і вибірка.

Одна з задач статистики заклечається в тому, щоб аналізувати дані, отримані на частині генеральної сукупності – вибірці, з метою зробити висновки відносно генеральної сукупності (популяції) в цілому.

Генеральна сукупність в статистистиці не обов’язково означає яку-небудь групу людей або звичайне товариство; цей термін відноситься до всіх істот або предметів, що утворюють вивчаєму сукупність, будь то атоми або студенти, які відвідують те чи інше кафе.

Вибірка – це невелика кількість елементів, відібраних за допомогою наукових методів так, щоб вона була репрезентативною, тобто відображала генеральну сукупність в цілому.

2. Дані і їх різновидності

Дані в статистиці – це основні елементи, які підлягають аналізу. Даними можуть бути які-небудь кількісні результати, властивості, притаманні визначеним членам генеральної сукупності, місце в тій або в іншій послідовності

– взагалі будь-яка інформація, яка може бути класифікована або розбита на категорії з метою подальшої її обробки.

Не слід змішувати «дані» з тими «значеннями», які ці дані можуть приймати. Для того, щоб завжди розрізняти їх, Шатійон (Chatillon, 1977) рекомендує запам’ятати наступну фразу: «Дані часто приймають одні й ті ж значення» (так, якщо ми візьмемо, наприклад, шість даних 8, 13, 10, 8, 10 і 5, то вони приймають лише чотири різних значення – 5, 8, 10 і 13).

Побудова розподілу – це розділення первинних даних, отриманих із вибірки, на класи, групи або категорії з метою отримати узагальнену впорядковану картину, яка б дозволила їх аналізувати.

Існує три типи даних

1. Кількісні дані, отримані при вимірах (наприклад, дані про вагу, розміри, температуру, час, результати тестування і т. п.). їх можна розподіляти по шкалі з рівними інтервалами.
2. Порядкові дані, які відповідають місцям цих елементів в послідовності, отриманій при їх розташуванні в зростаючому порядку (1-й, …, 7-й, …, 100-й, …, А, Б, В, …).
3. Якісні дані, що являють собою деякі властивості елементів вибірки або генеральної сукупності. Їх не можна виміряти, і єдиною кількісною оцінкою служить частота повтору (число осіб з голубими або зеленими очима, курильщиків або некурильщиків, втомлених і відпочивших, сильних і слабких і т. д.).

Із всіх типів даних тільки кількісні дані можна аналізувати за допомогою методів, в основі яких лежать параметри (такі, наприклад, як середнє арифметичне). Але навіть до кількісних даних такі методи можна застосовувати лише в тому випадку, якщо число цих даних достатнє, щоб проявився нормальний розподіл.

Таким чином, для використання параметричних методів в принципі необхідні три умови: дані повинні бути кількісними, їх число повинне бути достатнім, а їх розподіл – нормальним. У всіх інших випадках завжди рекомендується використовувати непараметричні методи.

1. О П И С О В А С Т А Т И С Т И К А.

Описова статистика дає можливість узагальнювати первинні результати, а отримані при спостереженні їх в експерименті. Процедури в даному випадку зводяться до групування даних по їх значеннях, побудові розподілу їх частот, виявленні їх центральних тенденцій розподілу (наприклад, середньої арифметичної) і, нарешті, до оцінки розкиду даних по відношенню до знайденої центральної тенденції.

1.1. Організація експерименту

Насамперед потрібно відокремити зовнішні змінні, які можуть впливати на залежну змінну.

Вибір експериментального плану зумовлений різними факторами, зокрема кількістю досліджуваних.

Якщо в експерименті бере участь група досліджуваних, то найпростішим є план для двох груп: експериментальної і контрольної.

Якщо потрібно виявити вплив двох і більше незалежних змінних на одну залежну, вибирають факторний план. При цьому незалежні змінні можуть мати кілька рівнів інтенсивності. До простих факторних планів належать плани типу 2х2 або 2х2х2. У них використовується 2 або 3 незалежні змінні з двома рівнями інтенсивності.

В [3, -с. 63] наведений приклад результатів дослідження впливу ситуативної тривожності X досліджуваних на характеристики їхньої пам'яті Y. Операційними змінними були:

– для рівня ситуативної тривожності – бали тесту самооцінки тривожності Спілберга;

– для характеристик пам’яті – кількість правильних відповідей на запитання вікторини.

«Сирі» дані подано у вигляді таблиці

табл. 1. залежність пам'яті від ситуативної тривожності

Досліджуваний	Показник рівня тривожності x	Кількість правильних відповідей y
1	2,8	8
2	1,9	13
3	2,9	5
4	2,0	16
5	3,0	11
6	3,1	6
7	2,8	9
8	1,6	18
9	3,2	5
10	3,3	2

1.2. ГРУПУВАННЯ ДАНИХ

Представимо «сирі» дані табл. 1 у вигляді варіаційного ряду, розташувавши результуючу ознаку у зростаючому порядку

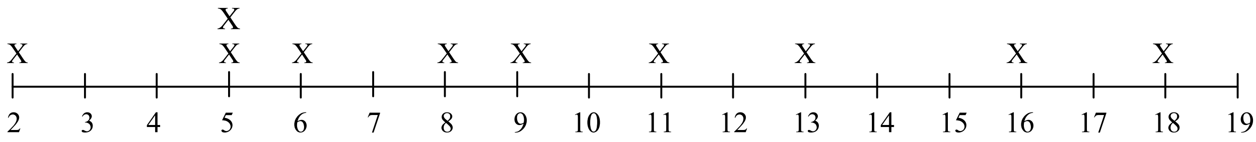
табл. 2. Варіаційний ряд

x	3,3	3,2	2,9	3,1	2,8	2,8	3,0	1,9	2,0	1,6
y	2	5	5	6	8	9	11	13	16	18

Для групування необхідно перш за все розташувати дані кожної вибірки у зростаючому порядку і вивчити розподіл частот (числа вражених мішеней).

1.3. ПОБУДОВА ГІСТОГРАМ

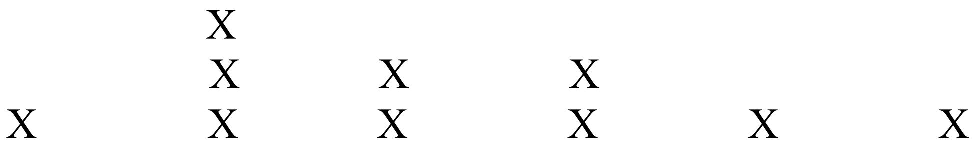
Нанесемо прямолінійну рівномірну шкалу, яку підпишемо відносно до даних, приведених в табл. 2 і відмітимо на цій шкалі дані, які повторюються.



Такий розподіл даних по їх значенням дає нам вже набагато більше уявлення, ніж представлення у вигляді рядів. Але подібне групування використовують в основному лише для якісних даних, які чітко розділяються на відособлені категорії.

Кількісні дані завжди розташовуються на безперервній шкалі, і, як правило, дуже багаточисленні. Тому такі дані грунтуються по класам, щоб ясніше була видна основна тенденція розподілу.для цього об’єднують дані з однаковими або близькими значеннями в класи і визначають частоту для кожного класу. Спосіб розробки на класи залежить від того, що саме експериментатор хоче виявити при розділі вимірювальної шкали на рівні інтервали.

Наприклад, в кожному випадку раціонально згрупувати дані по класам з інтервалом у три одиниці шкали.



Класи	2 - 4	5 - 7	8 - 10	11 - 13	14 - 16	17 - 19
Частоти	1	3	2	2	1	1

рис. 2. Ступінчастий графік з інтервалом у три одиниці.

Вибір того чи іншого групування залежить від різних міркувань. Так, наприклад, групування з інтервалом у три одиниці має ту перевагу що дає більш узагальнену і спрощену картину розподілу, особливо якщо врахувати, що число елементів в кожному класі невелике. При більшій кількості даних число в по можливості повинно бути десь в межах від 10 до 20 з інтервалами до 10 або більше.

В подальщому ми будемо оперувати класами у три одиниці.

Дані, розбиті на класи по безперервній шкалі, не можна представити графічно так, як це було зроблено вище. Тому віддають перевагу так званим *гістограмам*. Гістограма – це спосіб графічного представлення у вигляді примикаючих один до одного прямокутників.

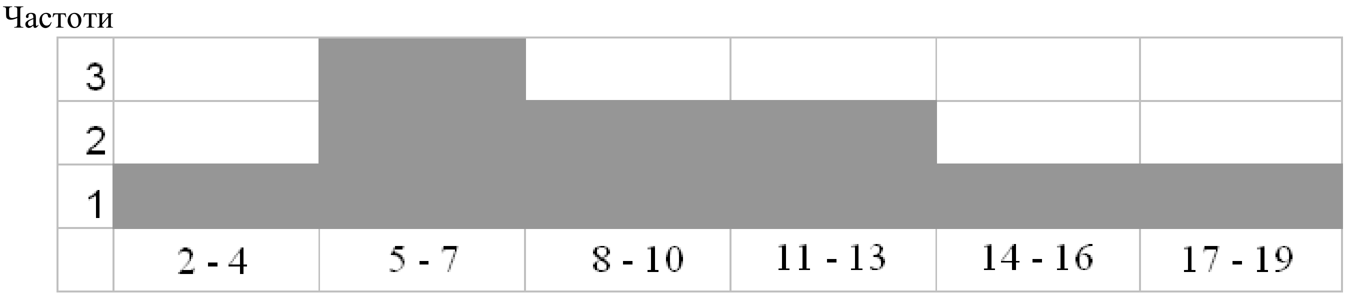


рис. 3. Гістограма результуючих ознак

1.4. Полігон розподілу частот

З метою ще більш наочного представлення загальної конфігурації розподілу частот. Для цього відрізками прямих з'єднують центри верхніх сторін всіх прямокутників в гістограмі, а після з обох сторін «замикають» площу під кривою, доводячи кінці полігонів до горизонтальної осі (частота = 0) в точках ,відповідних самим крайнім сначенням розподілу.

При цьому отримують слідуючу картину:

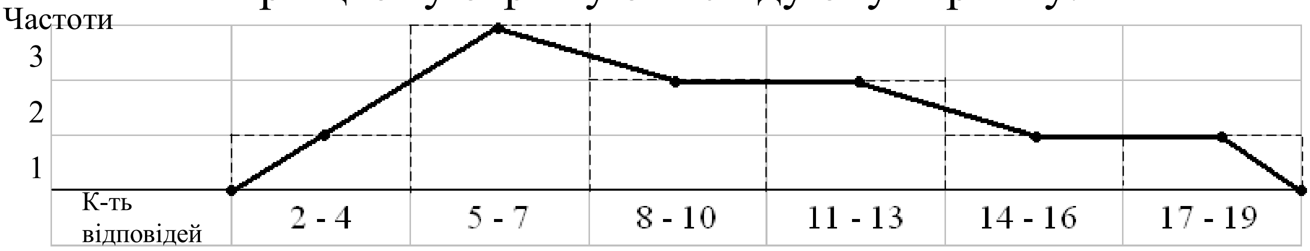


рис. 4. Полігон розподілу частот

Якщо порівняти полігони, наприклад, для фонових (вихідних) значень контрольної групи і значень після впливу фактора тривожності для дослідної групи, то можна буде побачити, що в першому випадку полігон майже симетричний, тоді як для експериментальної групи він асиметричний і зміщений вліво (а справа у нього як би витягнутий шлейф).

Полігон для фонових даних контрольної групи порівняно близький до ідеальної кривої, яка могла б бути отримана для нескінченно великої генеральної сукупності. Така крива – крива нормального розподілу – має дзвоноподібну форму і строго симетрична. Якщо ж кількість даних обмежена (як у випадках, що отримують в результаті наукових досліджень), то у кращому випадку отримують лише деяке наближення (апроксимацію) до кривої нормального розподілу.

Якщо побудувати полігон для фонових значень дослідної групи і значень після впливу фактору тривожності, то ми отримаємо аналогічну картину.

1. 5. Оцінка мір центральної тенденції

Якщо розподілити для контрольної групи і для фонових значень у дослідній групі більш-меньш симетричні, то значення, отримані в дослідній групі після впливу фактора тривожності групуються, як уже говорилось, більше в лівій частині кривої. Це говорить про те, що після впливу фактора тривожності виявляється тенденція до погіршення показників у більшого числа досліджуваних. Для того, щоб виразити подібні тенденції кількісно, використовують три види показників – моду, медіану і середню.

1. 5. 1. Мода

Мода (Мо) – це самий простий із трьох показників. Він відповідає або найбільш частому значенню, або середньому значенню класа з найбільшою частотою. Так, в нашому випадку для експериментальної групи мода буде рівна 5 (повторюється два рази), а середина класа – 6.

Мода використовується рідко і головним чином для того, щоб дати загальну уяву про розподіл. В деяких випадках у розподілі можуть бути дві моди; тоді говорять про бімодальний розподіл. Така картина вказує на те, що в даній сукупності є дві відносно самостійні групи.

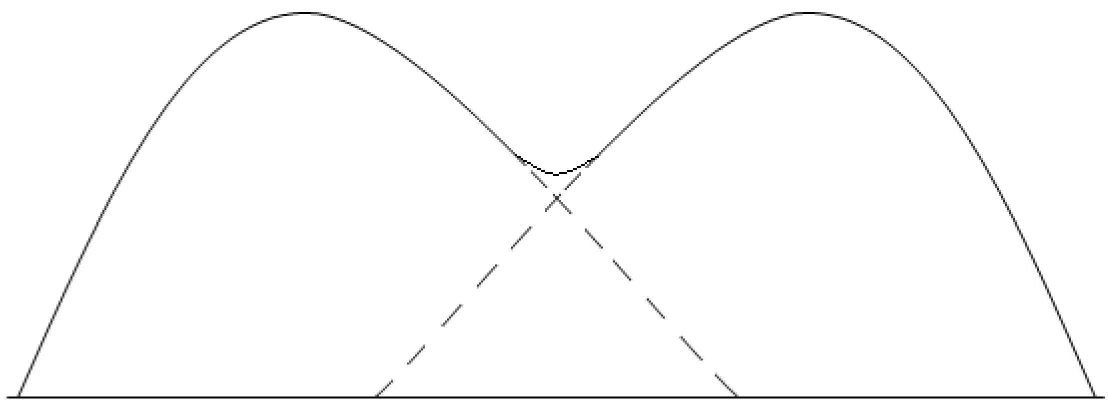


рис. 5. Біноміальний розподіл.

1. 5. 2. Медіана

Медіана (Me) відповідає центральному значенню у послідовному ряді всіх отриманих значень. Якщо число даних n – парне, медіана дорівнює середній арифметичній між значеннями, що знаходяться в ряді на $n/2$ і $n/2+1$ місці. Для нашого ряду 2, 5, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 19, 18 медіана розташовується між значеннями, які знаходяться на 5-му (10/2=5) і 6-му місці в ряді, тобто

$$Me = (8+9)/2 = 8{,}5.$$

Таким чином, медіана не відповідає ні одному із отриманих значень.

1.5.3. Середня арифметична

Середня арифметична M (в подальшому просто "середня") – це найбільш часто застосований показник центральної тенденції. Її застосовують, частково, у розрахунках, необхідних для опису розподілу і для його подальшого аналізу. Її вичисляють, розділивши суму всіх значень даних на число даних. Так, для нашої групи вона буде.

$$\overline{M} = \frac{2+5+5+6+8+9+11+13+16+18}{10} = \frac{93}{10} = 9{,}3\,.$$

При симетричному розподілі середня арифметична, мода і медіана рівні між собою. Для асиметричних кривих ці статистичні величини неоднакові. Причому середня арифметична і медіана зміщені від центра вбік довшої гілки кривої. Оскільки середня арифметична ($\overline{M}$) "чутлива" до "точного" положення більш віддалених від моди (M_0) точок кривої, а медіана (Me) "нечутлива", то середня ($\overline{M}$) зрушена більше, ніж медіана (Me). У цьому випадку медіана знаходиться між модою і середньою арифметичною.

Число
досліджуваних

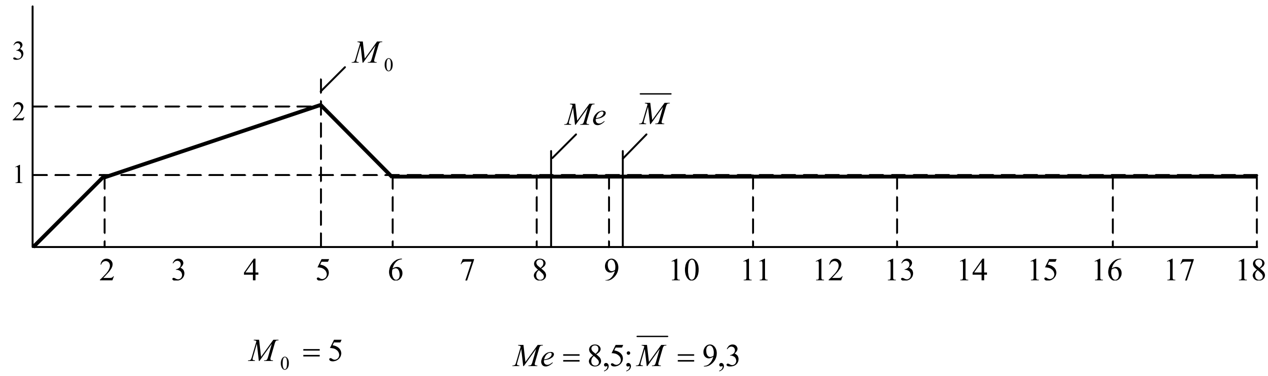


Рис. 6. Графічне представлення мір центральної тенденції.

1.6. Дисперсія і стандарт. Асиметрія і ексцес.

Для кількісної оцінки відхилення результатів відносно середньої в тому чи іншому розподілі розраховують відхилення кожного із отриманих значень від середньої $(M_i - \overline{M})$

$$d_i = M_i - \overline{M}\,, \qquad (1)$$

де M_i – і –те значення експериментальних даних;

M – середня ряду;

d_i – відхилення від середньої.

$$(2-9{,}3)+(5-9{,}3)+(5-9{,}3)+(6-9{,}3)+(8-9{,}3)+(9-9{,}3)+(11-9{,}3)+(13-9{,}3)+(16-9{,}3)+(18-9{,}3)$$
$$=(-7{,}3)+(-4{,}3)+(-3{,}3)+(-1{,}3)+(-0{,}3)+1{,}7+3{,}7+6{,}7+8{,}7=0$$

Але при такому додаванні відємні і додатні відхилення будуть компенсуватись, так що результат буде рівний нулю. Із цього ясно, що потрібно находити суму абсолютних значень окремих відхилень і вже цю суму ділити на число даних.

При цьому отримуємо слідуючий результат.

$$\frac{|-7{,}3|+|-4{,}3|+|-4{,}3|+|-3{,}3|+|-1{,}3|+|-0{,}3|+|1{,}7|+|3{,}7|+|6{,}7|+|8{,}7|}{10}=\frac{41{,}8}{10}=4{,}18$$

Властивість компенсації дає можливість встановити принцип отримання із експериментального ряду результату, найбільш близького до його істинного значення, тобто найбільш точного. Таким результатом є середнє арифметичне $\overline{M}$ із n експериментальних даних досліджуваного фактора. При нескінченно великому числі n.

$$\lim_{n\to\infty}(\Sigma|d|/n)\to 0 \tag{2}$$

При конечному числі вимірів арифметична середина включає в себе остаточну випадкову похибку, але від точного значення вона відрізняється менше, ніж будь-який результат M_i. Це дає можливість при будь якому числі вимірів, якщо $n>1$, приймати арифметичну середину за кінцеве значення. Точність кінцевого результату тим вища, чим більше n.

Таким чином, середнє відхилення θ розраховується за формою.

$$\theta=\frac{\Sigma|d|}{n}, \tag{3}$$

де Σ (сігма) означає суму;

$|d|$ - абсолютне значення кожного окремого відхилення від середньої;

n – число даних.

Але абсолютними значеннями досить важко оперувати в алгебраїчних формулах, які використовуються у більш складному статистичному аналізі. Тому статистики вирішили піти "обхідним шляхом", який дає можливість відмовитися від значень з від'ємним знаком, а саме підводити всі значення в квадрат, а після ділити суму квадратів на число даних. В нашому прикладі

$$D = \frac{(-7,3)^2 + (-4,3)^2 + (-4,3)^2 + (-3,3)^2 + (-1,3)^2 + (-0,3)^2 + (1,7)^2 + (3,7)^2 + (6,7)^2 + (8,7)^2}{10} = \frac{240,1}{10} = 24,01$$

В результаті такого розрахунку отримують дисперсію D.

$$D = \frac{\Sigma d^2}{n}. \qquad (4)$$

Для того щоб отримати показник, який можна спів ставити з середнім відхиленням, статистики вирішили добувати із дисперсії квадратний корінь. При цьому отримують так зване стандартне відхилення δ.

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}. \qquad (5)$$

Для того, щоб більш точно оцінити стандартне відхилення для малих вибірок (з числом елементів меншим 30), в знаменнику виразу (5) під коренем слід брати не n, а $n-1$.

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n-1}}, \qquad n < 30. \qquad (6)$$

Стандартне відхилення (стандарт) для генеральної сукупності позначається маленькою грецькою буквою сігма (δ), а для вибірки – буквою s. Це відноситься і до дисперсії, тобто квадрата стандартного відхилення: для генеральної сукупності воно позначається δ^2, а для вибірки s^2.

Вернемося тепер до нашого експерименту і подивимося, наскільки корисним є цей показник для опису виборок.

Сума $(\Sigma)d^2 = 240{,}1$.

Дисперсія $(S^2) = \frac{\Sigma d^2}{n-1} = \frac{240{,}1}{9} = 26{,}68$.

Стандартне відхилення $(S) = \sqrt{(S)^2} = \sqrt{26{,}68} = 5{,}16$.

Про що ж говорить стандартне відхилення, рівне 5,16? Виявляється, воно дає можливість сказати, що більша частина результатів (виражених "числом вражених мішеней") розміщується в межах 5,16 від середньої, тобто між 4,14 (9,3-5,16) і 14,46 (9,3+5,16)

Табл. 3. Вихідні розрахункові дані для обчислення початкових моментів ряду розподілу

i	**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**	**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**	x^2	y^2	x^3	y^3	x^4	y^4
1	2,8	8	7,84	64	21,952	512	61,4656	4096
2	1.9	13	3,61	169	6.859	2197	13,0321	28561
3	2,9	5	8,41	25	24,389	125	70,7281	625
4	2,0	16	4	256	8	4096	16	65536
5	3,0	11	9	121	27	1331	81	14641
6	3,1	6	9,61	36	29,791	216	92,3521	1296
7	2,8	9	7.84	81	21,952	729	61,4656	6561
8	1,6	18	2,56	324	4,096	5832	6,5536	104976
9	3,2	5	10,24	25	32,768	125	104,8576	625
10	3,3	2	10,89	4	35,937	8	118,5921	16
$n = 10$	Σ 26,6	Σ 93,0	74,0	1105	212,744	15171	626,0468	226933

Початковий момент першого порядку

$$\bar{x} = m_1(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{26{,}6}{10} = 2{,}66,$$

$$\bar{y} = m_1(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{93}{10} = 9{,}3.$$

Початковий момент другого порядку

$$m_2(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{74}{10} = 7{,}4\,,$$

$$m_2(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1105}{10} = 110{,}5\,.$$

Початковий момент третього порядку

$$m_3(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \frac{212{,}744}{10} = 21{,}2744\,,$$

$$m_3(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^3 = \frac{15171}{10} = 1517{,}1\,.$$

Початковий момент четвертого порядку

$$m_3(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \frac{626{,}0468}{10} = 62{,}60468\,,$$

$$m_3(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^4 = \frac{226933}{10} = 22693{,}3\,.$$

Розрахунок центральних моментів

$$M_1(x) = M_1(y) = 0\,,$$
$$M_2(x) = m_2(x) - m_1^2(x) = 7{,}4 - (2{,}66)^2 = 0{,}3244\,,$$
$$M_2(y) = m_2(y) - m_1^2(y) = 110{,}5 - (9{,}3)^2 = 24{,}01\,,$$
$$M_3(x) = m_3(x) - 3m_1(x)m_2(x) + 2m_1^3(x) = 21{,}2744 - 3\cdot 2{,}66\cdot 7{,}4 + 2\cdot(2{,}66)^3 = -0{,}135408\,,$$
$$M_3(y) = m_3(y) - 3m_1(y)m_2(y) + 2m_1^3(y) = 1517{,}1 - 3\cdot 9{,}3\cdot 110{,}5 + 2\cdot(9{,}3)^3 = 42{,}864\,,$$
$$M_4(x) = m_4(x) - 4m_1(x)m_3(x) + 6m_1^2(x)m_2(x) - 3m_1^4(x) =$$
$$= 62{,}60468 - 4\cdot 2{,}66\cdot 21{,}2744 + 6\cdot(2{,}66)^2\cdot(7{,}4) - 3\cdot(2{,}66)^4 = 0{,}2093579\,,$$

$$M_4(y) = m_4(y) - 4m_1(y)m_3(y) + 6m_1^2(y)m_2(y) - 3m_1^4(y) =$$
$$= 22693{,}3 - 4\cdot 9{,}3\cdot 1517{,}1 + 6\cdot(9{,}3)^2\cdot(110{,}5) - 3\cdot(9{,}3)^4 = 1158{,}4897 .$$

Величина дисперсії

$$D_x = \delta_x^2 = M_2(x) = 0{,}3244 ,$$
$$D_y = \delta_y^2 = M_2(y) = 24{,}01 .$$

Величина $\delta = \sqrt{D}$ є стандартним відхиленням

$$\delta_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}3244} = 0{,}57 ,$$

$$\delta_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{24{,}01} = 4{,}9 .$$

Для нормального розподілу обчислена дисперсія є зміщеною. Для незміщеної дисперсії

$$D_0(x) = \delta_{n-1}^2(x) = M_2(x)\frac{n}{n-1} = 0{,}3244\frac{10}{9} = 0{,}36 ,$$

$$D_0(y) = \delta_{n-1}^2(y) = M_2(y)\frac{n}{n-1} = 24{,}01\frac{10}{9} = 26{,}68 .$$

Незміщений стандарт

$$\delta_0(x) = \sqrt{D_0(x)} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}60; \quad \delta_0(y) = \sqrt{D_0(y)} = \sqrt{26{,}68} = 5{,}16 .$$

Характер скошеності функції щільності розподілу *P(x),P(y)* визначається значенням асиметрії *A*.

$$A_x = \frac{1}{nD^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 = \frac{M_3}{M_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{-0{,}135408}{\sqrt{(0{,}3244)^3}} = -0{,}73286,$$

$$A_y = \frac{M_3(y)}{M_2^{\frac{3}{2}}(y)} - 3 = \frac{42{,}864}{\sqrt{(24{,}01)^3}} = 0{,}36434 .$$

Показником гостроти піка *P(x), P(y)* у порівнянні з нормальним розподілом, є ексцес *E*

$$E_x = \frac{1}{nD^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4 = \frac{M_4(x)}{M_2^2(x)} - 3 = \frac{0,2093579}{(03244)^2} - 3 = -1,0106\,,$$

$$E_y = \frac{M_4(y)}{M_2^2(y)} - 3 = \frac{1158,4897}{(24,01)^2} - 3 = -0,9904\,.$$

Розмах варіації

$$R_x = x_{\max} - x_{\min} = 3,3 - 1,6 = 1,7\,,$$
$$R_y = y_{\max} - y_{\min} = 18 - 2 = 16\,.$$

Квадратичний коефіцієнт варіації

$$V_{\delta_x} = \frac{\delta_x}{\overline{x}} 100\% = \frac{0{,}60}{2{,}66} 100\% = 22{,}56\%$$

$$V_{\delta_y} = \frac{\delta_y}{\overline{y}} 100\% = \frac{5{,}16}{9{,}3} 100\% = 55{,}48\%$$

Лінійний коефіцієнт варіації

$$V_{л.y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \overline{y} \right|}{n} = 4{,}18,$$

$$V_{л.x} = \frac{|2{,}8-2{,}66| + |1{,}9-2{,}66| + |2{,}9-2{,}66| + |2-2{,}66| + |3-2{,}66| + |3{,}1-2{,}66| + |2{,}8-2{,}66| + |1{,}6-2{,}66| + 3{,}2-2{,}66 + |3{,}3-2{,}66|}{10} =$$

$$= \frac{|0{,}14| + |-0{,}76| + |0{,}24| + |-0{,}66| + |0{,}34| + |0{,}44| + |0{,}14| + |-1{,}06| + |0{,}54| + |0{,}64|}{10} = \frac{4{,}96}{10} = 0{,}496$$

Коефіцієнт осциляції

$$V_{R_x} = \frac{R_x}{\overline{x}} 100\% = \frac{1{,}7}{2{,}66} 100\% = 63{,}9\%$$

$$V_{R_y} = \frac{R_y}{\overline{y}} 100\% = \frac{16}{9{,}3} 100\% = 17{,}2\%$$

По розрахованим значенням $\overline{x}$, D, A і E можна в першому наближенні судити про можливі закони розподілу факторних і результативних ознак.

Додатнє значення показника асиметрії результуючих ознак свідчить про правосторонню асиметрію розподілу характеристик пам'яті, а абсолютне його значення (0,25 < 0,36 < 0,5) означає наявність помірної асиметрії в досліджуваному ряді розподілу.

Відповідно до величини розрахункового показника ексцесу (E_y = -0,99), крива розподілу характеризується платокуртчиною формою з помірно вираженою ексцесивністю, тобто форма кривої на графіку – плосковершина.

Для кривої нормального розподілу (при $\bar{x}=0$ і δ=1). Значення коефіцієнта ексцесу (E_x) становить 0,263. Найбільша величина від’ємного ексцесу становить мінус два. При такому значенні вершина кривої опускається до осі абсцис, і крива розподілу ділиться на дві самостійні одновершинні криві. В нашому випадку (-2< -0,99 <0), що говорить про помірну ексцесивність.

Протокол № 1 розрахунку початкових і центральних моментів, асиметрії і ексцесу факторної ознаки х ситуативної тривожності на МК 61

№ п/п	Введення даних	Результат	Позначення	№ п/п	Введення даних	Результат	Позначення
1.	10хпо,хпа		n	13.		2,66	$\bar{x}=m_1$
2.	в/о, с/п			14.		0,3244	D
3.	2,8 с/п		x_1	15-17.	пха, х,пха		
4.	1,9 с/п		x_2	18-20.	1,-,:	0,3604	D_0
5.	2,9 с/п		x_3	21.	$F\sqrt{}$	0,60 с/п	δ_0
6.	2,0 с/п		x_4	22.		-0,73286 с/п	A
7.	3,0 с/п		x_5	23.		-1,0106 с/п	E
8.	3,1 с/п		x_6	24.		0,3244 с/п	M_2
9.	2,8 с/п		x_7	25.		-0,1354 с/п	M_3
10.	1,6 с/п		x_8	26.		0,2094	M_4
11.	3,2 с/п		x_9	27.	пх3	21,2744	m_3
12.	3,3 с/п		x_{10}	28.	пх4	62,60468	m_4
				29.	пх2	7,4	m_2

Протокол № 2 розрахунку початкових і центральних моментів, асиметрії і ексцесу результативної ознаки У характеристик пам’яті У на програмованому мікрокалькуляторі Електроніка МК 61.

№ п/п	Введення даних	Результат	Позначення	№ п/п	Введення даних	Результат	Позначення
1.	10хпо,хпа		n	13.		9,3	y=m
2.	в/о, с/п			14.		24,01	D
3.	8 с/п		y_1	15-17.	пха, х,пха		
4.	13 с/п		y_2	18-20.	1,-,:	26,677	D_0
5.	5 с/п		y_3	21.	$F\sqrt{}$	5,16 с/п	δ_0
6.	16 с/п		y_4	22.		0,3643 с/п	A
7.	11 с/п		y_5	23.		-0,9904 с/п	E
8.	6 с/п		y_6	24.		24,01 с/п	M_2
9.	9 с/п		y_7	25.		42,864 с/п	M_3
10.	18 с/п		y_8	26.		1158,492	M_4
11.	5 с/п		y_9	27.	пх3	1517,1	m_3
12.	2 с/п		y_{10}	28.	пх4	22693,3	m_4

				29.	пх2	110,5	m_2

$$\delta_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} = 0{,}614\,,\quad \delta_E = \frac{1}{(n-1)}\sqrt{24n(n-2)(n-3)/[(n+3)(n+5)]} = 0{,}922\,,$$

$A_y = 0{,}36 < 0{,}614$; $E_y = -0{,}99$; $|E_y| \approx \delta_E$, що говорить про нормальний закон розподілу експериментальних даних.

1.7. Крива розподілу результатів

Для того, щоб краще зрозуміти, що мається на увазі під "більшою частиною результатів", потрібно спочатку розглянути ті властивості стандартного відхилення, які проявляються при вивченні генеральної сукупності з нормальним розподілом.

Статистики показали, що при нормальному розподілі "більша частина результатів, розташованих в межах одного стандартного відхилення по обидві сторони від середньої, у процентному відношенні завжди одна і таж і не залежить від величини стандартного відхилення: вона відповідає 68% генеральної сукупності (тобто 34 % її елементів розміщується зліва і 34 % - справа від середньої).

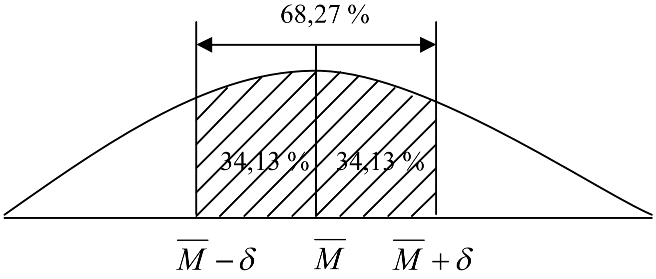


рис.7. Розміщення результатів в межах одного стандартного відхилення

Таким же чином розрахували, що 94,45 % елементів генеральної сукупності при нормальному розподілі не виходить за межі двох стандартних відхилень від середньої.

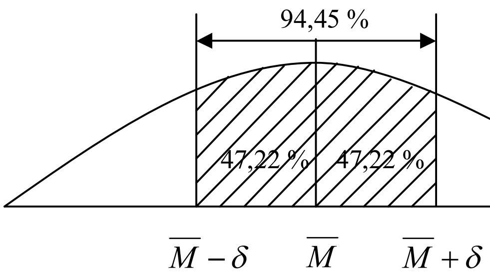


рис. 8. Розміщення результатів в межах двох стандартних відхилень і що в межах трьох стандартних відхилень вміщається вся генеральна сукупність – 99,73 %

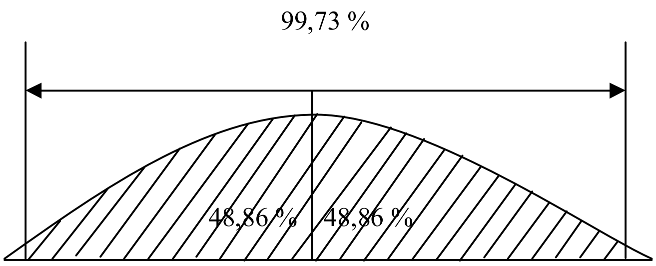
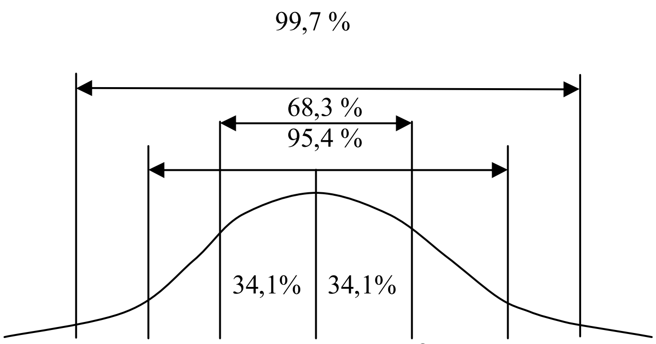


рис. 9. Розміщення результатів в межах трьох стандартних відхилень.

Приймаючи до уваги, що розподіл частот фона контрольної групи дуже близький до нормального, можна вважати. Що 68 % членів всієї генеральної сукупності, із якої взята вибірка, також буде отримувати аналогічні результати, тобто попадати в 4-14 мішеней із 18, розподіл результатів решта членів генеральної вибірки повинні виглядати слідуючим чином.



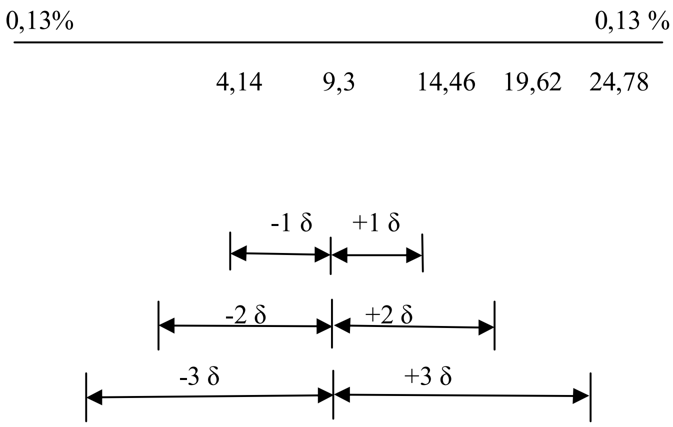


рис. 10. Вибірка із генеральної сукупності.

Таким чином, ознайомившись з описовою статистикою, ми познайомились з географічним представленням результатів експерименту і змогли оцінити кількісну степінь відхилення даних в тому чи іншому розподілі. Тим самим ми змогли зрозуміти, чим відрізняється в нашому дослідженні відхилення від нормальної кривої. Але, чи можна зробити висновки відносно того як відображає ця крива дійсність, чи це просто артефакт, зв’язаний з дуже малим об’ємом вибірки?

Крім того, дуже велика різниця d, що призводить до дуже великого стандартного відхилення δ, на основі чого можна стверджувати, що ця різниця дійсно достовірна, тобто достатньо велика, щоб можна було впевнено пояснити її впливом незалежної змінної, а не просто випадковістю? В якій степені можна опиратися на ці результати і поширити їх на всю генеральну сукупність, із якої взята вибірка, тобто стверджувати, що зростання фактора тривожності знижує показники пам’яті.

2. Індуктивна статистика

Задачі індуктивної статистики полягає в тому, щоб визначити, наскільки ймовірно що вибірка належить до генеральної сукупності.

Порівнюючи дві криві розподілу – до і після впливу ситуативної тривожності для дослідної групи і дві аналогічні криві для контрольної групи, можем зробити висновки чи належить дві вибірки до однієї генеральної сукупності. При цьому масштаб кривих повинен бути однаковим.

2.1. Перевірка гіпотез

Як вже говорилось, задача індуктивної статистики – визначати, чи достатньо велика різниця між середніми двох розподілів для того, щоб можна було пояснити її дією незалежної змінної, а не випадковістю, зв'язаною з малим об'ємом вибірки.

При цьому можливі дві гіпотези:

1) нульова гіпотеза (НО), згідно якої різниця між розподілами недостовірна; мається на увазі, що відмінність недостатньо значна, і тому розподіл відноситься до однієї і тієї ж генеральної сукупності, а незалежна змінна не виявляє ніякого впливу;
2) альтернативна гіпотеза (H_x), якою є робоча гіпотеза нашого дослідження. У відповідності з цією гіпотезою відмінність між обома розподілами достатньо значима і обумовлена впливом незалежної змінної.

Основний принцип метода перевірки гіпотез полягає в тому, що висувається нульова гіпотеза НО, з тим, щоб спробувати спростувати її і тим самим підтвердити альтернативну гіпотезу Н1. Дійсно, якщо результати статистичного тесту, що використовується для аналізу різниці між середніми, виявляється такими, що дадуть можливість відкинути НО, це буде означати, що вірна гіпотеза Н1, тобто висунута робоча гіпотеза підтверджується.

В гуманітарних науках прийнято вважати, що нульову гіпотезу можна відкинути на користь альтернативної гіпотези, якщо за результатами статистичного тесту ймовірність випадкового виникнення найденої відмінності не перевищує 5 із 100. Якщо ж цей рівень достовірності не досягається, вважають, що різниця цілком може бути випадковою і тому не можна відкинути нульову гіпотезу.

Для того щоб судити про те, яка ймовірність помилитися, приймаючи чи відкидаючи нульову гіпотезу, використовують статистичні методи, які відповідають особливостям вибірки.

Так, для кількісних даних при розподілах, близьких до нормальних, використовують параметричні методи, основані на таких показниках, як середня і стандартне відхилення. Зокрема, для визначення достовірності різниці середніх для двох виборок використовують метод Стьюдента, а для того щоб судити про відмінність між трьома чи більшим числом виборок, - тест F, або дисперсійний аналіз.

Якщо ми маємо діло з некількісними даними або вибірки дуже малі для впевненості в тому, що популяція, із якої вони взяті, підчиняються нормальному розподілу, тоді використовують непараметричні методи – критерії x^2 (x_i – квадрат) для кількісних даних і критерії знаків, рангів, Манна-Уітні, Вілкоксона і др. для порядкових даних.

Крім того, вибір статистичного методу залежить від того. Чи незалежні вибірки, середні яких порівнюються (наприклад, взяті із двох різних груп досліджуваних) або залежні (що відображають результати однієї і тієї ж групи досліджуваних до і після впливу або після двох різних впливів).

Рівні достовірності (значимості)

Той чи інший висновок з деякою ймовірністю може бути помилковим, причому ця ймовірність тим менша, чим менше є даних для обґрунтування цього висновку. Таким чином, чим більше отримано результатів, тим в більшій степені по відмінностям між двома вибірками можна судити про те, що дійсно має місце в тій генеральній сукупності, із якої взяті ці вибірки.

Однак, вибірки, які звичайно використовують, відносно невеликі, і в цих випадках ймовірність помилки може бути значною. В гуманітарних науках прийнято вважати, що різниця між двома вибірками відбиває дійсну різницю між відповідними генеральними сукупностями лише в тому випадку, якщо ймовірність помилки для цього твердження не перевищує 5%, тобто є лише 5 шансів із 100 помилитися, висуваючи таке твердження. Це так званий рівень достовірності (рівень надійності, довірчий рівень) відмінності. Якщо цей рівень не перевищений, то можна вважати ймовірним, що виявлена нами різниця дійсно відображає стан справи в генеральній сукупності (звідки ще одна назва цього критерія – поріг ймовірності).

Для кожного статистичного метода цей рівень можна взнати із спеціальних таблиць розподілу критичних значень відповідних критеріїв (t, x^2 і т.і); в цих таблицях приведені цифри для рівней 5 % (0.05), 1 % (0,01) або ще більш високих. Якщо значення критерія для даного числа степенів свободи буде нижче критичного рівня, що відповідає порогу ймовірності 5 %, то нульова гіпотеза не може вважатися відкинутою, і це значить, що виявлена різниця недостовірна.

2.2. Параметричні методи. Метод Стьюдента.

Цей параметричний метод, що використовується для перевірки гіпотез про достовірність різниці середніх при аналізі кількісних даних в генеральних сукупностях з нормальним розподілом і з однаковою дисперсією. На жаль, метод Стьюдента дуже часто використовують для малих виборок, не впевнившись попередньо в тому, що дані у відповідних генеральних сукупностях підчиняються закону нормального розподілу (наприклад, результати виконання дуже легкого завдання, з яких справились всі досліджувані, або ж, навпаки, дуже важкого завдання не дають нормального розподілу).

Метод Стьюдента різний для незалежних і залежних виборок. Незалежні вибірки отримують при дослідженні двох різних груп досліджуваних (в нашому експерименті це контрольна і досліджувана групи).

У випадку незалежних виборок для аналізу різниці середніх застосовують формулу

$$t = \frac{\overline{M_1} - \overline{M_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}, \qquad (7)$$

де $\overline{M_1}$ – середня першої вибірки; $\overline{M_2}$ – середня другої вибірки; S_1 – стандартне відхилення для першої вибірки; S_2 – стандартне відхилення для другої вибірки; n_1 і n_2 - число елементів у першій і другій вибірках.

Приведемо фрагменти таблиці значень t – розподілу Стьюдента при ймовірності Р=0,95 і різних степенях свободи К.

Табл.. 3. Значення t – розподілу Стьюдента

К	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60
t	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13	2.12	2,11	2,10	2,093	2,086	2,064	2,045	2,032	2,023	2,016	2,009	2,001

В нашому експерименті за допомогою метода Стьюдента для незалежних виборок можна перевірити, чи існує достовірна різниця між фоновими рівнями (значеннями, отриманими до впливу фактору ситуативної тривожності S_2 = 2,06, $\overline{M_2}$ = 8,7 і після впливу S_1 = 5,16, $\overline{M_1}$ = 9,3)

$$t = \frac{9{,}3 - 8{,}7}{\sqrt{\frac{(5{,}16)^2}{10} + \frac{(2{,}06)^2}{10}}} = \frac{0{,}6}{1{,}76} = 0{,}34$$

Якщо наш результат був би більший, ніж значення t для рівня достовірності 0,05 (ймовірність 5%), знайдене в таблиці 3, то можна було б відкинути нульову гіпотезу (НО) і прийняти альтернативну гіпотезу (Н1), тобто вважати різницю середніх достовірною.

Якщо ж, навпаки, отриманий при обчисленні результат менший, ніж табличний (для n- 2 степеней свободи), то нульову гіпотезу не можна відкинути і, отже, різниця середніх недостовірна.

Приймаючи до уваги, що до впливу фактору тривожності у фоновому експерименті приймало участь 10 чоловік $n_2 = 10$ і в експерименті після впливу фактору тривожності $n_1 = 0$, то К $= n_1 + n_2 - 2 = 18$.

Із таблиці 3 для к=18 вибираємо $t' = 2{,}10$, тому рівень ймовірності для такого t буде вище 0,05 і нульову гіпотезу не можна відкинути; таким чином, різниця між двома вибірками недостовірна, тобто вони цілком можуть належати до однієї генеральної сукупності.

Скорочено цей висновок записується слідуючим чином:

$t = 0{,}53; h = 18; p > 0{,}05$; недостовірно.

Як вже говорилось, у зв’язку з малим об’ємом вибірки і, приймаючи до уваги, що результати досліджуваної групи після впливу фактору тривожності слабо відповідає нормальному розподілу, краще використати непараметричний метод, наприклад U – тест Манна –Уітні.

Аналогічно використовується t – тест для перевірки гіпотези про достовірність різниці середньої між результатами дослідної і контрольної групи після впливу фактору ситуативної тривожності.

Степеневі свободи

Для того, щоб звести до мінімуму помилки, в таблицях критичних значень статистичних критеріїв в загальній кількості даних не враховують ті, які можна вивести методом дедукції. Дані, які залишились складають так звані степеневі свободи, тобто, це число даних із вибірки, значення яких може бути випадковим.

Так, якщо сума трьох даних рівна 8, то перші два із них можуть приймати будь-які значення, але якщо вони визначені, то третє значення стає автоматично відомим. Якщо, наприклад, значення першого даного дорівнює 3, а другого – 1, то третє може бути рівним тільки 4. Таким чином, в такій вибірці є тільки дві степені свободи. В загальному випадку для вибірки із n даних існує n-1 степінь свободи.

Якщо ми маємо дві незалежні вибірки, то число степенів свободи для першої із них буде $n_1 - 1$, а для другої $n_2 - 1$. Так як при визначенні достовірності різниці між ними опираються на аналіз кожної вибірки, число степенів свободи, по якому потрібно буде знаходити критерії t в таблиці 3, буде складати

$$(n_1 + n_2) - 2.$$

Якщо ж мова йде про дві залежні вибірки, то в основі розрахунку лежить обчислення суми різниць, отриманих для кожної пари результатів (тобто, наприклад, різниць між результатами до і після впливу на одного і того ж досліджуваного). Так як одну (будь-яку із цих різниць можна вирахувати знаючи решту різниць і їх суму, число степенів свободи для визначення критерії t буде дорівнювати n-1.

Метод Стьюдента для залежних виборок.

До залежних виборок відносяться, наприклад, результати однієї і тієї ж групи досліджуваних до і після впливу незалежної змінної. У нашому випадку за допомогою статистичних методів для залежних виборок можна перевірити гіпотезу про достовірність різниці між фоновим рівнем і рівнем після впливу фактора тривожності окремо для досліджуваної і для контрольної групи.

Нанісши на точкову діаграму значення результатів впливу ситуативної тривожності, замітимо, розподіл групи на дві підгрупи – з однієї підгрупи досліджувані 1,6,7,8,9 і з другої 2,3,4,5,10.

Складемо розрахункову таблицю.

Таблиця 4. Підготовка даних.

№ досл.	x_i	y_i	№ досл.	x'_i	y'_i	$d_x = x-x'$	d_x^2	$d_y = y-y'$	d_y^2
1	2,8	8	3	2,9	5	-0,1	0,01	+3	9
6	3,1	6	5	3,0	11	+0,1	0,01	-5	25
7	2,8	9	4	2,0	16	+0,8	0,64	-7	49
8	1,6	18	2	1,9	13	-0,3	0,09	+5	25
9	3,2	5	10	3,3	2	-0,1	0,01	+3	9
n=5	Σ 13,5	Σ =46	n=5	Σ 13,1	Σ 47	Σd_x =+0,4	Σ 0,76	Σd_y=-1	Σ 117

Для визначення достовірності різниці середніх у випадку залежних виборок застосовують слідуючи формулу

$$t = \frac{\Sigma d}{\sqrt{\frac{n\Sigma d^2 - (\Sigma d)^2}{n-1}}}, \qquad (8)$$

де d – різниця між результатами в кожній парі;
Σd – сума цих окремих різниць;
Σd^2 – сума квадратів окремих різниць.

Отримані результати звіряють з таблицею 3, находячи в ній значення, що відповідають n-1 степені свободи; n – це в даному випадку число пар даних.

В нашому випадку

$$t_x = \frac{0{,}4}{\sqrt{\frac{5\cdot 0{,}76 - (0{,}4)^2}{5-1}}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}91}} = 0{,}42,$$

$$t_y = \frac{-1}{\sqrt{\frac{5\cdot 117 - (-1)^2}{5-1}}} = \frac{-1}{\sqrt{146}} = -0{,}08.$$

Табличне значення

t_4 = 2,78. Величини t_x і t_y менші ніж t_4, що є порогом для рівня значимості 0,05 (p=0,95) при 4 степенях свободи. Другими словами, нульова гіпотеза не може бути відкинута, і різниця між вибірками недостовірна, тобто, середні результати експериментальних даних відрізняється незначимо.

В скороченому виді це записується слідуючим чином:

$t = 0{,}42; h = 4; p > 0{,}05$; недостовірно;

$t = -0.08; h = 4; p > 0{,}05$; недостовірно.

2.3.Дисперсійний аналіз. Тест Ф.Снедекора.

Метод Снедекора – це параметричний тест, який застосовують в тих випадках, коли є тричі більше число вибірок. Суть цього методу полягає в тому, щоб визначити, чи є розмах середніх для різних вибірок відносно загального середнього для всієї сукупності даних достовірно відмінним від розмаху даних відносно середньої в межах кожної вибірки. Якщо всі вибірки належать до однієї тієї ж генеральної сукупності, то розмах між ними повинен бути не більшим, ніж розмах даних всередині їх самих.

В методі Снедекора в якості показника розмаху використовують дисперсію. Тому аналіз зводиться до того, щоб порівняти дисперсію розподілу між вибірками з дисперсіями в межах кожної вибірки, або

t =…; h =…; P…(<, =, > ?) 0,05; недостовірно

$$F = \frac{\hat{\delta}^2 між}{\hat{\delta}^2 всередині} \qquad (9)$$

Де $\hat{\delta}^2$ **між** – дисперсія середніх кожної вибірки відносно загальної середньої;

$\hat{\delta}^2$ **всередині** – дисперсія даних всередині кожної вибірки.

Якщо відмінність між вибірками недостовірна, то результат повинен бути близьким до 1. Чим більше буде F у порівнянні з 1, тим більш достовірною буде відмінність.

Таким чином, дисперсійний аналіз показує, чи належать вибірки до однієї генеральної сукупності, але з його допомогою не можна виділити ті вибірки, які вирізняються від других. Для того, щоб визначити ті пари вибірок, різниця між якими достовірна, слід після дисперсійного аналізу застосувати метод Шеффе.

2.4. Непараметричні методи. Метод χ^2 (" Хі – квадрат")

Для використання непараметричного методу χ^2 не потрібно обчислювати середню або стандартне відхилення. Його перевага полягає в тому, що для його застосування необхідно знати лише залежність розподілу частот від двох змінних; це дає можливість виявити, чи зв'язані вони одна з одною, або, навпаки, незалежні. Таким чином, цей статистичний метод використовується для обробки якісних даних. Крім цього, за його допомогою можна перевірити, чи існує достовірна відмінність між числом людей, які справляються із завданням якого – не будь інтелектуального тесту, чи ні, і числом тих же людей, що отримали при навчанні високі чи низькі оцінки; між числом хворих, які отримали нові ліки, і числом тих, кому ці ліки не допомогли; і , на кінець, чи існує достовірний зв'язок між віком людей і їх успіхом або невдачею у виконанні тестів на пам'ять і т. і. У всіх подібних випадках цей тест дає можливість визначити число досліджуваних, які задовільняють одному і тому ж критерію для кожної із змінних.

Для метода немає обмежень, властивих методу Стьюдента – він може застосовуватися і в тих випадках, коли розподіл не є нормальним, а вибірки невеликі.

При обробці даних нашого експерименту за допомогою методу Стьюдента ми впевнилися в тому що підвищення рівня ситуативної тривожності знижує характеристики пам'яті.

До такого ж висновку можна було б прийти за допомогою методу х і- квадрат

Для цього складено спеціальну таблицю

Таблиця 5**. Значення емпіричних частот**

Умови		**Результати**		
		Погіршення	**Без змін або покращення**	**Всього**
	Після впливу	**9**	**1**	**10**
	Без впливу	**3**	**7**	**10**
	Всього	**12**	**8**	**20**

В подальшому необхідно порівняти ці дані з теоретичними частотами (Т), які могли б бути отримані, якби всі відмінності були чисто випадковими. Якщо враховувати тільки підсумкові дані, згідно яких, з однієї сторони, у 14 досліджуваних результативність знизилась, а у 6 – підвищилась, а з другої – 10 із всіх досліджуваних були під впливом фактора тривожності, то теоретичні частоти будуть такими:

Таблиця 6. Розподіл теоретичних частот

Умови		**Результати**		
		Погіршення	**Без змін або покращення**	**Всього**
	Після впливу	$12 \cdot 10/20 = 6$	$8 \cdot 10/20 = 4$	**10**
	Без впливу	$12 \cdot 10/20 = 6$	$8 \cdot 10/20 = 4$	**10**
	Всього	**12**	**8**	**20**

2.5. Теоретичні частоти

Метод Хі- квадрат (χ^2) полягає в тому, що оцінюють, наскільки подібні між собою розподіли емпіричних і теоретичних частот. Якщо різниця між ними невелика, то можна вважати, що відхилення емпіричних частот від теоретичних обумовлені випадковістю. Якщо ж, навпаки, ці розподіли будуть достатньо різними, можна буде вважати, що відмінність між ними значимі і існує зв’язок між дією незалежної змінної і розподілом емпіричних частот.

Для обчислення χ^2 визначають різницю між кожною емпіричною і відповідною теоретичною частотами за формулою $\frac{(E-T)^2}{T}$, а після результати, отримані по всіх таких порівняннях, додають $\chi^2 = \sum \frac{(E-T)^2}{T}$ (10)

У нашому випадку все це можна представити у вигляді табл.7

Таблиця 7. Представлення значень

	E	T	E – T	$(E-T)^2$	$(E-T)^2/T$
Тривожність, покращення	1	4	-3	9	2,25
Тривожність, погіршення	9	6	+3	9	1,5
Без впливу, погіршення	3	6	-3	9	1,5
Без впливу, покращення	7	4	+3	9	2,25

$\sum$ 7,5

$$\chi^2 = \sum\left[(E-T)^2 / T\right] = 7{,}5.$$

Для розрахунку числа степенем свободи число строчок в табл.6 за мінусом одиниці множать на число стовпчиків без одиниці. Таким чином, в нашому випадку число степенів свободи рівне $(2-1)\times(2-1)=1.$

Табличне значення χ^2 вибирають із таблиці 8.

Таблиця 8. Значення χ^2 для рівня значимості 0,05 і числі степенів свободи K

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
χ^2	3,8	6,0	7,8	9,5	11,1	12,6	14,1	15,5	16,9	18,3	19,7	21,0

Таблиця значення χ^2 для рівня значимості 0,05 і 1 степені свободи складає 3,8. Так як вирахуване нами значення χ^2 набагато більше, нульову гіпотезу слід відкинути. Значить, між рівнем ситуативної тривожності і характеристиками пам’яті дійсно є зв’язок . Слід, однак, відмітити, що якщо число степенів свободи більше 1, то критерій χ^2 не можна використовувати, коли в 20 або більше процентах випадків теоретичні частоти менше 5, або коли хоч би в одному випадку теоретична частота дорівнювала нулю (Siegel, 1956).

2.6.Критерій знаків (біноміальний критерій)

Критерій знаків – це ще один непараметричний метод, який дає можливість легко перевірити, чи вплинула незалежна змінна на виконання завдання досліджуваних. При цьому методі спочатку підраховують число досліджуваних, у яких результати знизились, а після порівнюють його з тим числом, яке можна було б сподіватись на основі чистої випадковості (в нашому випадку ймовірність випадкової події 1:2) . Далі визначають різницю між цими двома числами, щоб вияснити, наскільки вона достовірна.

При підрахунках результати збільшення ефективності, беруть зі знаком плюс, а зменшення – зі знаком мінус; випадки відсутності різниці не враховують.

Розрахунки проводять за формулою

$$Z = \frac{(X \pm 0{,}5) - n/2}{\sqrt{\frac{n}{2}}} , \qquad (11)$$

Де X - сума “плюсів”або сума “мінусів”;

$n/2$ - число зсуву в ту чи другу сторону при чистій випадковості один шанс із двох. Така ймовірність характерна, наприклад, для n кидань монети. (У випадку ж якщо n раз кидають гральну кисть, то ймовірність випадання тієї чи іншої грані вже дорівнює одному шансу із 6 (n/6).); 0,5 – поправочний коефіцієнт, який добавляють до X , якщо $X<n/2$, або віднімають, якщо $X> n/2$.

Якщо ми порівняємо в нашому експерименті результативність досліджуваних до впливу (фон) і після впливу, то отримаємо один плюс і дев’ять мінусів.

Таким чином, у дев’яти випадках результати погіршились, у даному – покращились. Тепер нам залишається вирахувати критерій Z для одного із цих двох значень X:

або $$Z = \frac{(9-0{,}5)-\frac{10}{2}}{\sqrt{\frac{10}{2}}} = \frac{3{,}5}{2{,}24} = 1{,}56,$$

або $$Z = \frac{(1+0{,}5)-\frac{10}{2}}{\sqrt{\frac{10}{2}}} = \frac{-3{,}5}{2{,}24} = -1{,}56.$$

На основі таблиці значень Z робимо висновок, що для рівня значимості 0,05 отримана нами величина Z виявилася вище табличної. Це значить, що нульову гіпотезу слід відкинути. Тобто, під дією незалежної змінної характеристики пам'яті дійсно погіршилися.

Критерій знаків особливо часто використовують при аналізі даних, отриманих в дослідженнях по парапсихології. За допомогою цього критерія легко можна порівняти, наприклад, число так званих телепатичних або психокінетичних реакцій (X) з числом подібних реакцій, які могли б бути обумовлені чистою випадковістю (n/2).

2.7. Другі непараметричні критерії

Існують і другі непараметричні критерії, які дають можливість перевіряти гіпотези з мінімальною кількістю розрахунків.

Критерій рангів

Критерій рангів дозволяє перевірити, чи є порядок слідування деяких подій чи результатів випадковим чи він зв'язаний з дією деякого фактора, не врахованого дослідником. За допомогою цього критерія можна, наприклад, визначити, чи випадковий порядок послідовності чоловіків і жінок у черзі. У нашому досліді цей критерій дав би можливість взнати, чи не чергуються погані і добрі результати кожного досліджуваного експериментальної групи після впливу деяким чином, або чи не приходяться добрі результати в основному на початок і кінець випробувань.

При роботі з цим критерієм спочатку виділяють такі послідовності, в яких підряд слідують значення менші медіани, і такі, в яких підряд ідуть значення більше медіани. Після по таблиці розподілу R (від англ.runs – послідовності) перевіряють, чи обумовленні ці відмінні послідовності тільки випадковістю.

При роботі з порядковими даними використовують такі непараметричні тести, як тест U (Манна – Уітні) і тест Т Вілкоксона. Тест U дає можливість перевірити, чи існує достовірна одиниця між двома незалежними вибірками після того , як згруповані дані цих вибірок класифікуються і ранжируються і обчислюється сума рангів для кожної вибірки. А критерій Т використовується для залежних вибірок і оснований як на ранжируванні, так і на знаці відмінностей між кожною парою даних. Такі дані частіше всього отримуються при ранжируванні кількісних даних, які не можна обробити за допомогою параметричних тестів.

Щоб показати використання цих критеріїв на прикладах, було б потрібно дуже багато місця. При бажанні читач може детальніше познайомитися з ними по спеціальним посібникам.

3. Кореляційний аналіз

При вивченні кореляцій стараються встановити, чи існує якийсь зв'язок між двома показниками в одній вибірці (наприклад, між ростом і вагою дітей або між рівнем IQ і шкільною встигаємістю) або між двома різними вибірками (наприклад, при порівнянні пар близнюків), і якщо цей зв'язок існує, то чи супроводжується збільшення одного показника зростанням (додатня кореляція) або зменшенням (від'ємна кореляція) другого.

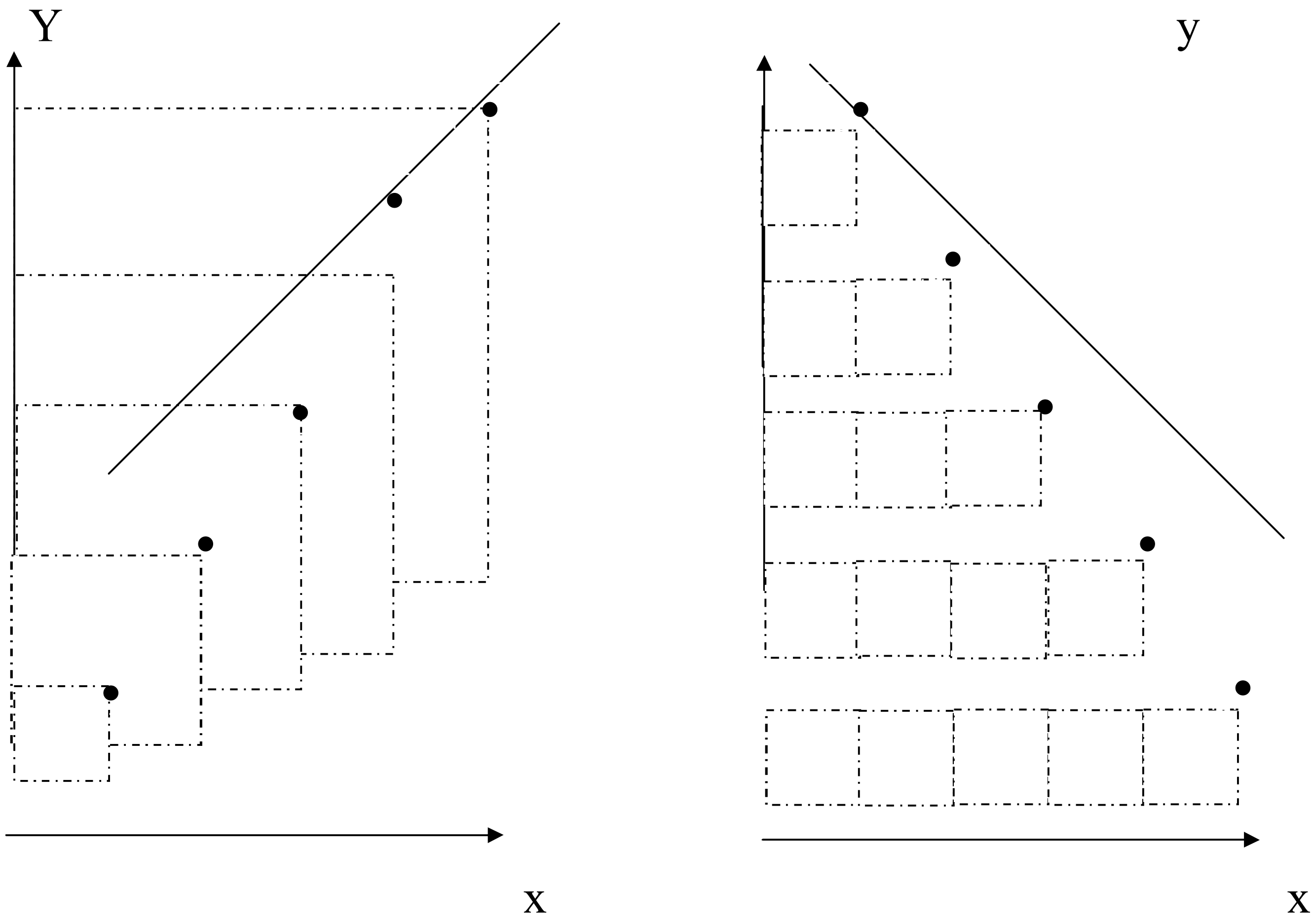
Другими словами, кореляційний аналіз помагає встановити, чи можна передбачити можливі значення одного показника, знаючи величину другого.

З цією метою можна примінити два різних способи: параметричний метод розрахунку коефіцієнта Браве – Пірсона (r) і розрахунку коефіцієнта кореляції рангів

Спірмена (rs) , який застосовується до порядкових даних, тобто є непараметричним.

3.1. Коефіцієнт кореляції

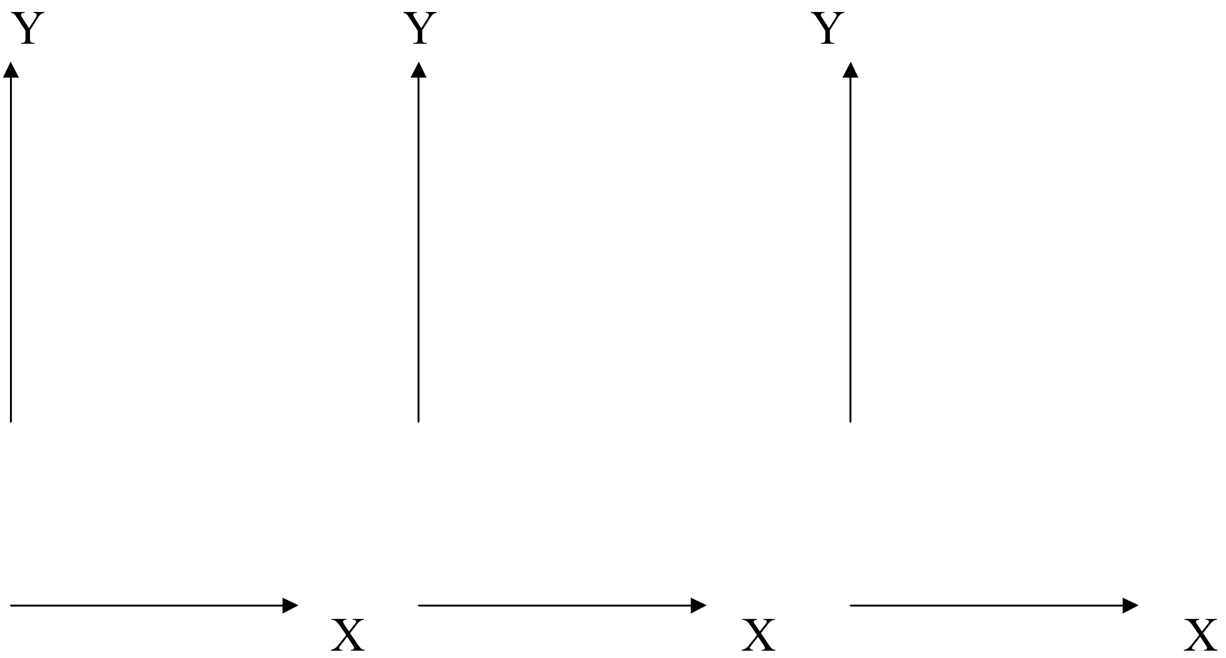
Коефіцієнт кореляції – це величина , яка може варіюватися в межах від +1 до -1. У випадку повної позитивної кореляції цей коефіцієнт рівний плюс 1, а при повній від'ємній – мінус 1. На графіку цьому відповідає пряма лінія, яка проходить через точки перетину значень кожної пари даних:



а) б)

рис.11. Повна кореляція а)- позитивна, б)- від'ємна

Якщо точки не вистроюються по прямій лінії, а утворюють" хмарку" коефіцієнт кореляції по абсолютній величині стає менше одиниці і по мірі заокруглення цієї хмарки приближається до нуля



R=0,60 r=-0,30

рис.12. Різні значення коефіцієнта кореляції

Якщо коефіцієнт кореляції рівний нулю, то обидві змінні повністю незалежні одна від одної.

У гуманітарних науках кореляція вважається сильною, якщо її коефіцієнт вищи 0,60; якщо ж він перевищує 0,90, то кореляція вважається дуже сильною. Але для того щоб можна було робити висновки про зв'язки між змінними, більше значення має об'єм вибірки: чим вибірка більша , тим достовірніша величина отриманого коефіцієнта кореляції. Існують таблиці з критичними значеннями коефіцієнта кореляції Браве – Персона і Спірмена для різного числа степенів свободи (воно рівне числу пар мінус два, тобто n-2). Лише в тому випадку, якщо коефіцієнти кореляції більше цих критичних значень, вони можуть вважатися достовірними. Так, для того, щоб коефіцієнт кореляції 0,70 був достовірним, в аналіз повинно бути взято не лише 8 пар даних (h=n-2=6) при обчисленні r і 7 пар даних (h=n-2=5) при обчисленні rs.

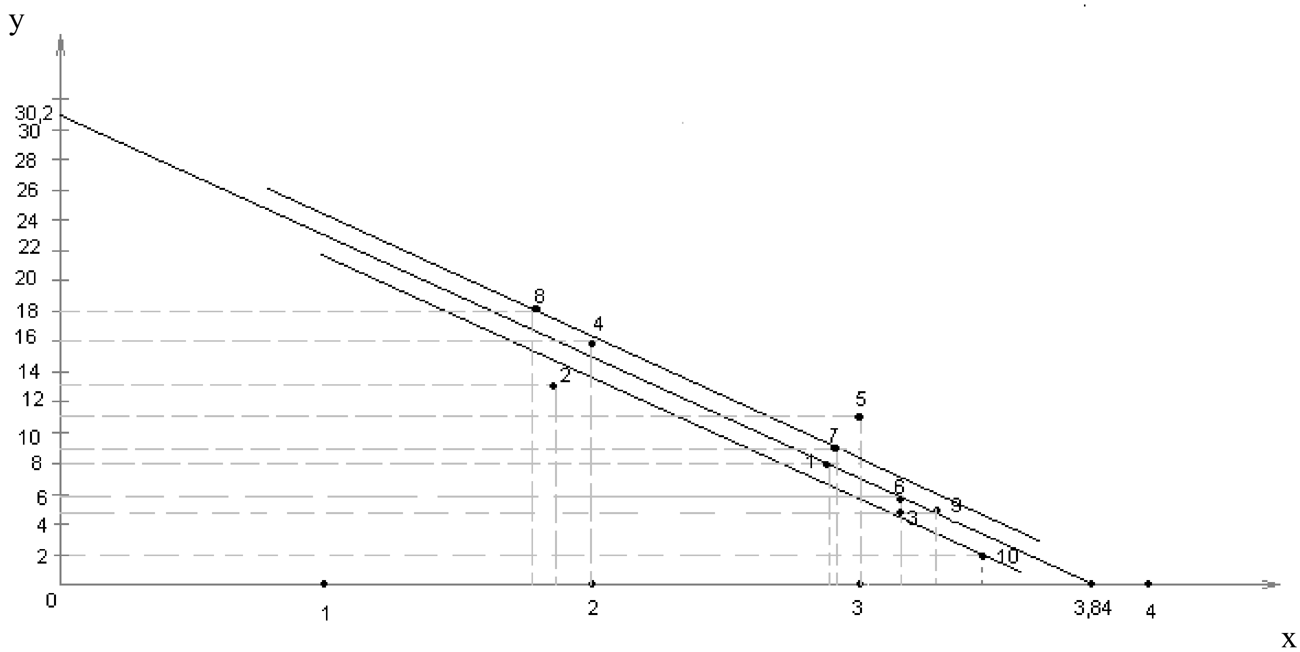


Рис. 13.. Апроксимована за методом найменших квадратів регресійна крива розглядаємого експерименту ($\delta_e = 2,06$)

3.2. Коефіцієнт кореляції Браве – Персона (r)

Коефіцієнт кореляції Браве – Персона (r) – це параметричний показник, для обчислення якого порівнюють середні і стандартні відхилення результатів двох вимірів. При цьому використовують формулу (у різних авторів вона може виглядати по – різному)

$$r = \frac{(\Sigma XY) - n\overline{XY}}{(n-1)S_y S_y} \quad , \qquad (12)$$

Де ΣXY - сума добутків даних із кожної пари;
$\overline{X}$ - середня для даних змінних X;
$\overline{Y}$ - середня для даних змінних Y;
S_x - стандартне відхилення для розподілу X;
S_y - стандартне відхилення для розподілу Y.

$$r = \frac{221{,}1 - 10 \cdot 2{,}66 \cdot 9{,}3}{9 \cdot 0{,}57 \cdot 4{,}9} = \frac{-25{,}58}{25{,}137} = -10 \, .$$

3.3. Коефіцієнт кореляції рангів Спірмена (rs)

Даний коефіцієнт кореляції відноситься до непараметричних показників, за допомогою якого намагаються виявити зв'язок між рангами відповідних величин у двох рядах вимірів.

Розраховується цей коефіцієнт простіше, але його результати менш точні, ніж при використанні r. Це пов'язано з тим, що при обчисленні коефіцієнта Спірмена використовують порядок слідування даних, а не їх кількісні характеристики і інтервали між класами.

Діло в тому , що при використанні коефіцієнта кореляції рангів Спірмена (rs) перевіряють тільки, чи буде ранжирування даних для якої – не будь вибірки таким же, як і в ряді других даних для цієї ж вибірки, попарно зв'язаних з першими (наприклад, чи будуть однаково "ранжируватися студенти" при проходженні ними як психології, так і математики, або навіть при двох різних викладачах психології ?

Якщо коефіцієнт близький К+1, то це значить; що обидва ряда практично співпадають, а якщо цей коефіцієнт близький К-1, можна говорити про повну обернену залежність.

Коефіцієнт (rs) розраховують за формулою

$$r_s = 1 - \frac{6(\Sigma d^2)^2}{n^3 - n}, \qquad (13)$$

Де d – різниця між рангами спряжених значень ознак (незалежно від її знаку), n – число пар.

Звичайно цей непараметричний тест використовують у тому випадку, коли потрібно зробити якісь висновки не стільки про інтервали між даними, скільки про їх ранги, а також тоді, коли криві розподілу дуже асиметричні і не дозволяють використати такі параметричні критерії, як коефіцієнт r (у таких випадках буває необхідно перетворити кількісні дані порядкові).

На основі даних табл.1 запишемо

$$\Sigma d^2 = \Sigma(\mathrm{X}_i - \mathrm{Y}_i)^2 = (2{,}8-8)^2 + (1{,}9-13)^2 + (2{,}9-5)^2 + (2{,}0-16)^2 + (3{,}0+11)+$$

$$+(3{,}1-6)^2 + (2{,}8-9)^2 + (1{,}6-18)^2 + (3{,}2-5)^2 + (3{,}3-2)^2 =$$

$$= 27{,}04 + 123{,}21 + 4{,}41 + 196 + 64 + 8{,}41 + 38{,}44 + 268{,}96 + 3{,}24 + 1{,}69 = 735{,}4$$

$r_s = 1 - \frac{6(735{,}4)^2}{10^3 - 10} = 1 - \frac{3244878{,}96}{990} = 1 - 3277{,}65 = -3276{,}65$, що говорить про повну обернену залежність.

Висновки

1. Розглянуті різні параметричні і непараметричні статистичні методи, які застосовуються у психології.
2. Дана методика може бути застосована для багатьох експериментів.
3. В роботі намічені головні напрямки, які можуть бути корисними для тих, кому необхідно провести обробку матеріалів психологічного експерименту.
4. Приведені результати проведеного психологічного експерименту .
5. Проведено ранжирування даних і побудований варіаційний ряд.
6. Виконано представлення даних у вигляді гістограми і полігону розподілу частот.
7. Проведена оцінка мір центральної тенденції.
8. Даються характеристики асиметрії і ексцесу.
9. Приділяється увага перевірці статистичних гіпотез.

10. Знаходиться дисперсія і стандарт, проводиться крива розподілу результатів.
11.Акцентується увага на застосуванні параметричних методів досліджень.
12.Проводиться аналіз за методом Стьюдента.
13.Розглядається дисперсійний аналіз.
14.Звертається увага на застосування тесту F Снедекора.
15.Уділяється увага застосуванню непараметричних методів.
16.Приводиться кореляційний аналіз.

Література

1.Гласс Дж.,Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. - М.: Прогресс, 1976, - 495с.
2. Годфруа Ж . Что такое психология. – М.:, 1992.
3. Максименко С.Д., Косенко Є.Л. Експериментальна психологія. – К.: МАУП, 2004,-128с.
4. Chatillon G., 1977. Statistique en Sciences humaines, Trois – Rivieres, Ed. SMG.
5.Gilbert W., 1978. Statistiques, Montreal, Ed. HRW.
6. Moroney M.J., 1970. Comprendre la statistique, verviers, Gerard et Cie.
7. Siegel S., 1956. Non – parametric Statistic, New York, Mac Graw – Hill Book. Co.

Літнарович Руслан Миколайович
Доцент, кандидат технічних наук

Основи математичної статистики у психології

Частина 3

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір, верстка і редагування у редакторі
Microsoft Office 2003
Борщук Тетяна Михайлівна
Хомич Ольга Володимирівна
Козлюк Наталія Михайлівна

Міжнародний Економіко – Гуманітарний Університет ім..
акд. Степана Дем'янчука

33027, м. Рівне. акад. С. Дем'янчука